

1 基礎數學 – 作業一詳解

1.1 作業資訊

- 作業形式：TronClass 線上測驗
 - 題目類型：3 道單選題 + 5 道是非題 + 1 道簡答題（共 100 分）
 - 截止時間：2025/10/24 23:59
 - 公布成績：2025/10/25 00:15
-

1.2 題目與詳解

1.2.1 第 1 題：函數的定義域（單選題）

題目： $\frac{1}{x-2}$ 這個函數的定義域不包含哪一個點？

答案：C. 2

詳解：

函數 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 的定義域需排除使分母為零的值。

$$x - 2 = 0 \implies x = 2$$

因此定義域為 $\{x \mid x \neq 2\}$ 或 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

重點提醒：

- 分式函數的定義域：分母不能為零
- 找出使分母為零的 x 值，從定義域中排除

1.2.2 第 2 題：函數代入（單選題）

題目：如果 $f(x) = x^3$ ，則 $f(z) = ?$

答案：C. z^3

詳解：

使用函數代入法（框框法）：

$$f(\square) = \square^3$$

代入 z ：

$$f(z) = z^3$$

重點提醒：

- 框框法：將函數中的 x 用框框表示，代入時整個框框替換成要代入的變數或數值
- $f(x) = x^3$ 表示「不管代入什麼，都將它立方」
- 所以 $f(z) = z^3$ 、 $f(2) = 2^3 = 8$ 、 $f(a+b) = (a+b)^3$ 都是相同的道理

1.2.3 第 3 題：指數律（單選題）

題目： $(2^3)^3 = ?$

答案：D. 2^9

詳解：

使用指數律：指數的指數

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

因此：

$$(2^3)^3 = 2^{3 \times 3} = 2^9$$

計算驗證：

- $2^3 = 8$
- $(2^3)^3 = 8^3 = 512$
- $2^9 = 512$

重點提醒：

- 指數律： $(a^m)^n = a^{m \times n}$ (指數相乘)
 - 不要和 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (指數相加) 混淆
-

1.2.4 第 4 題：函數的對應域與值域 (是非題)

題目：函數的「對應域」包含「值域」

答案： 正確

詳解：

根據函數定義 (Definition 2-1)：

- **對應域 (Codomain)**：所有可能的 y 值範圍
- **值域 (Range)**：實際產生的 y 值集合

關係：值域 \subseteq 對應域 (值域是對應域的子集)

例： $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

- 對應域： \mathbb{R} (所有實數)
- 值域： $[0, +\infty)$ (非負實數)

- 值域 對應域

重點提醒：

- 對應域：函數定義時指定的「目標範圍」
 - 值域：函數實際「產生的輸出」
 - 值域永遠是對應域的子集（或相等）
-

1.2.5 第 5 題：多項式函數（是非題）

題目： $f(x) = x^3$ 為一 x 的「多項式函數」

答案： 正確

詳解：

$$f(x) = x^3 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

符合多項式定義：

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

其中：

- $a_3 = 1$ (x^3 的係數)
- $a_2 = 0$ (x^2 的係數)
- $a_1 = 0$ (x 的係數)
- $a_0 = 0$ (常數項)
- 次數 = 3 (最高次項的次數)

多項式函數的特徵：

- 由有限個「 x 的非負整數次方」組成
- 每一項都是係數乘以 x 的次方

- 定義域為所有實數 \mathbb{R}

重點提醒：

- x^3 是多項式函數（三次多項式）
 - $x^{-1} = \frac{1}{x}$ 不是多項式（因為次數是負數）
 - $\sqrt{x} = x^{1/2}$ 不是多項式（因為次數不是整數）
 - 2^x 不是多項式（因為 x 在指數位置）
-

1.2.6 第 6 題：運算順序（是非題）

題目： $(-2) + (-2) - 2 = -6$ 的唸法是「減二加減二減二等於負六」

答案： 錯誤

詳解：

這題考的是「負號」和「減號」的唸法區別。

正確唸法：

$$(-2) + (-2) - 2 = -6$$

應該唸成：「負二加負二減二等於負六」

說明：

- (-2) ：這裡的負號是數字的一部分，要唸「負二」
- $+$ ：加號，唸「加」
- (-2) ：這裡的負號也是數字的一部分，要唸「負二」
- $-$ ：減號，唸「減」
- 2 ：正數二，唸「二」
- $=$ ：等於
- -6 ：負號是數字的一部分，唸「負六」

常見錯誤：

錯誤唸法：「減二加減二減二等於六」

- 把負號唸成「減」
- 把 -6 唸成「六」（忘記負號）

負號 vs 減號：

- **負號** (Negative sign)：表示數字本身是負數，如 -2 唸「負二」
- **減號** (Minus sign)：表示兩個數相減的運算，如 $5 - 2$ 唸「五減二」

驗證計算：

$$(-2) + (-2) - 2 = -2 - 2 - 2 = -6$$

重點提醒：

- 括號內的負號是數字的一部分，要唸「負」
- 運算符號的減號才唸「減」
- 正確唸數學式能幫助理解運算結構

1.2.7 第 7 題：完全平方公式（是非題）

題目： $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

答案： 錯誤

詳解：

正確公式（完全平方公式）：

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

證明（乘法展開）：

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

幾何圖解：

邊長 $(a+b)$ 的正方形面積：

$$a^2 \quad ab \quad a$$

$$ab \quad b^2 \quad b$$

$$a \quad b$$

$$\text{總面積} = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

常見錯誤：

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{忘記中間項 } 2ab)$$

數值驗證：

設 $a = 2, b = 3$

- 錯誤公式： $(2+3)^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$
- 正確公式： $(2+3)^2 = 5^2 = 25$
- 展開驗證： $2^2 + 2(2)(3) + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$

重點提醒：

- $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
 - 不要忘記中間項 $2ab$
 - 相關公式： $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
-

1.2.8 第 8 題：平方根性質（是非題）

題目：根號 2 的平方是 2

答案： 正確

詳解：

根據平方根定義：

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

一般公式：

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0)$$

反向關係：

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

數值驗證：

- $\sqrt{2} \approx 1.414$
- $1.414 \times 1.414 \approx 2$

重點提醒：

- 平方與平方根互為反運算
 - $(\sqrt{a})^2 = a$ (前提： $a \geq 0$)
 - $\sqrt{a^2} = |a|$ (注意絕對值)
-

1.3 學習重點總整理

1.3.1 本次作業涵蓋的核心概念

1. 函數定義域 (第 1 題)

- 定義：函數可以代入的所有 x 值
- 分式函數：分母不能為零
- 範例： $\frac{1}{x-2}$ 的定義域為 $\{x \mid x \neq 2\}$ 或 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

2. 函數代入 (第 2 題)

- 框框法： $f(\square) = \square^3$
- 代入步驟：將所有的 \square 替換成要代入的變數或數值
- 範例： $f(x) = x^3$ ，則 $f(z) = z^3$ 、 $f(2) = 2^3 = 8$

3. 指數律 (第 3 題)

- 指數的指數： $(a^m)^n = a^{m \times n}$ (指數相乘)
- 同底數相乘： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (指數相加)
- 不要混淆這兩個公式

4. 負號與減號的唸法 (第 6 題)

- 負號：數字的一部分，如 (-2) 唸「負二」
- 減號：運算符號，如 $5 - 2$ 唸「五減二」

- **重要**： $(-2) + (-2) - 2 = -6$ 要唸「負二加負二減二等於負六」

5. 完全平方公式 (第 7 題)

- **正確公式**： $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- **常見錯誤**： $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ (忘記 $2ab$)
- **記憶法**：用幾何圖形理解 (正方形面積)

6. 函數概念 (第 4、5 題)

- **對應域 vs 值域**：值域 對應域
- **多項式函數**： $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
- **判斷原則**：每一項都是係數乘以 x 的非負整數次方

7. 平方根性質 (第 8 題)

- **平方與平方根**： $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a \geq 0$)
- **反運算關係**：互為反運算
- **注意**： $\sqrt{a^2} = |a|$ (有絕對值)

1.4 學習建議

1.4.1 避免常見錯誤

1. 定義域問題

- 記得檢查分母是否為零
- 記得檢查根號內是否為非負數
- 記得檢查對數的真數是否大於零

2. 負號與減號

- 括號內的負號是數字的一部分，要唸「負」
- 運算符號的減號才唸「減」
- 正確唸數學式能幫助理解運算結構

3. 完全平方公式

- 不要忘記中間項 $2ab$
- 可以用幾何圖形幫助記憶
- 可以用 FOIL 法則展開驗證

4. 指數律

- 區分 $(a^m)^n$ 和 $a^m \cdot a^n$
- 前者指數相乘，後者指數相加
- 多做練習題加深印象

1.5 延伸學習

1.5.1 相關課程內容

- **第一週 (2025-10-02) : Ch2 函數 (1)**
 - 函數的定義、函數代入、指數律、負號規則、乘法公式
- **第三週 (2025-10-16) : Ch2 函數 (續)**
 - 乘法公式與合併同類項、高次方因式分解

公布日期：2025/10/25 課程：基礎數學 學期：114 學年度第 1 學期 學校：龍華科技大學