

情况 2: 2个未知数 x, y

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
 y & xy & yx^2 & yx^3 & yx^4 & \dots \\
 y^2 & xy^2 & x^2y^2 & y^2x^3 & y^2x^4 & \dots \\
 y^3 & xy^3 & y^3x^2 & & & \\
 y^4 & y^4x & & & &
 \end{array}$$

$2 \cdot x \cdot 1 = 2x$

例 1) $(x+y)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 = ?$

$$= \underbrace{(x^2 + y^2 + 2xy)}_{x^2 \quad y^2 \quad xy} + \underbrace{(x^2 + 1^2 + 2 \cdot x \cdot 1)}_{x^2 \quad 1^2 \quad 2 \cdot x \cdot 1} + \underbrace{(y^2 + 1^2 + 2 \cdot y \cdot 1)}_{y^2 \quad 1^2 \quad 2 \cdot y \cdot 1}$$

$$(x^2, y^2, xy, x, y, 1)$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + 2$$

②

$$\begin{aligned}
 & (x+y)^2 + (x-y)^2 \\
 &= \underbrace{(x^2 + y^2 + 2xy)}_{x^2 \quad y^2 \quad xy} + \underbrace{(x^2 + y^2 - 2xy)}_{x^2 \quad y^2 \quad xy}
 \end{aligned}$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + (2-2)xy$$

$$= 2x^2 + 2y^2$$

$$\begin{cases}
 (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\
 (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \\
 (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \\
 a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 \\
 a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \\
 a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)
 \end{cases}$$



例 4

若函數 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，求

(1) $f(4) - f(3) = ?$ (2) $f(x + \Delta x) - f(x) = ?$ (3) $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = ?$

(1) $f(\square) = \square^2 - 3\square + 1$

$$f(4) = 4^2 - 3 \times 4 + 1 = 16 - 12 + 1 = 5$$

$$f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 9 - 9 + 1 = 1$$

$$f(4) - f(3) = 5 - 1 = 4$$

$$7 \pm 2$$

寫在紙上



例 4

若函數 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，求

(1) $f(4) - f(3) = ?$ (2) $f(x + \Delta x) - f(x) = ?$ (3) $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = ?$

(1) $f(\square) = \square^2 - 3\square + 1$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1$$

$$= \underbrace{(x^2 + (\Delta x)^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x)}_{\substack{x^2 & (\Delta x)^2 & x \cdot \Delta x}} - 3(\underbrace{x}_{x} + \underbrace{\Delta x}_{\Delta x}) + 1$$

展開

$$= x^2 + \Delta x^2 + 2x \cdot \Delta x - 3x - 3\Delta x + 1$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \underbrace{(x^2 + (\Delta x)^2 + 2x \cdot \Delta x - 3x - 3\Delta x + 1)}_{\substack{x^2 & \Delta x^2 & x \cdot \Delta x & x & \Delta x & 1}} - \underbrace{(x^2 - 3x + 1)}_{\substack{x^2 & x & 1}}$$

$$= \cancel{x^2} + \Delta x^2 + 2x \cdot \Delta x - \cancel{3x} - \cancel{3\Delta x} + 1 - \cancel{x^2} + \cancel{3x} - 1$$

$$= \Delta x^2 + 2x \cdot \Delta x - 3\Delta x$$

展開

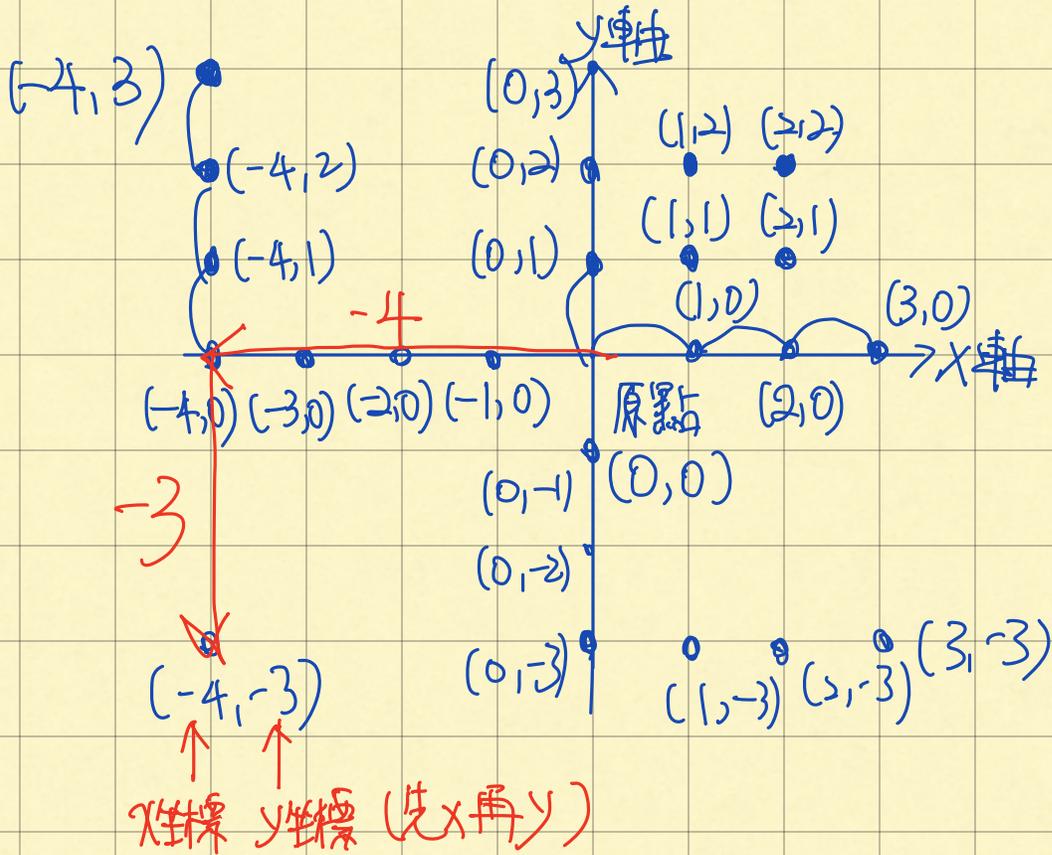
展开! (提公因式)

$$= \Delta x (\Delta x + 2x - 3)$$

$$(3) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x + 2x - 3)}{\cancel{\Delta x}} = \Delta x + 2x - 3$$

函數的圖形

• 直角坐標系



$$y = f(x) = x + 1$$



$$f(x) = ax + b$$

直線

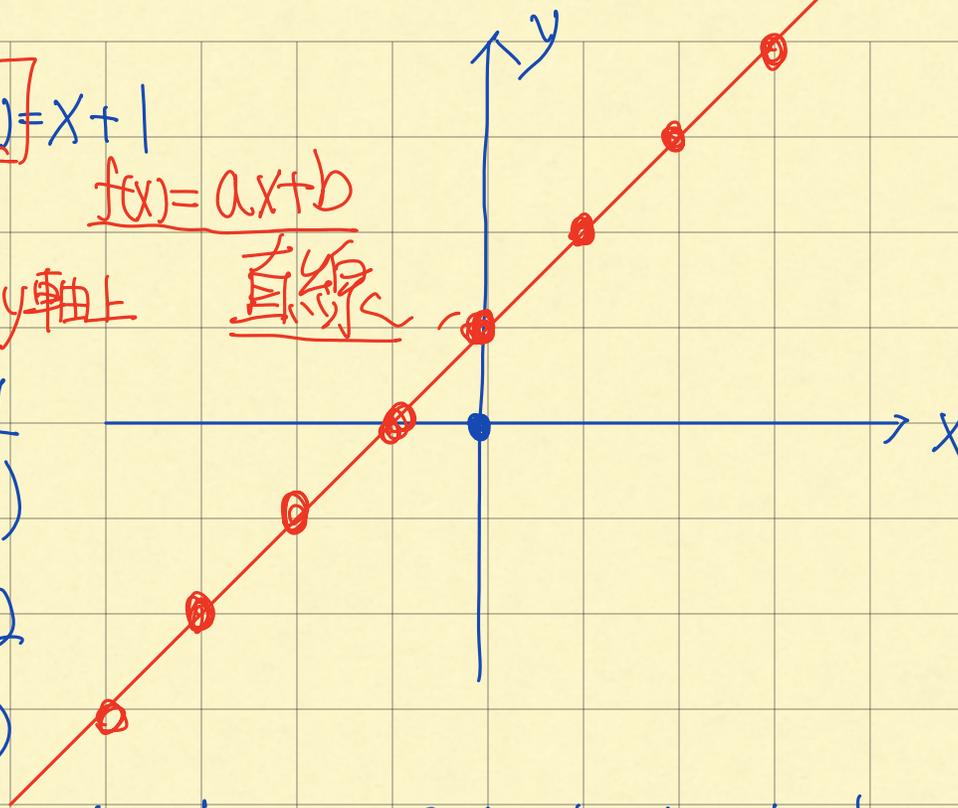
把 $f(x)$ 畫在 y 軸上

$$x=0 \Rightarrow f(x)=1$$

$$(x, y) = (0, 1)$$

$$x=1 \Rightarrow f(x)=2$$

$$(x, y) = (1, 2)$$



x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$y=f(x)$	1	2	3	4	5	0	-1	-2	-3

① 代入相同的 x

② 描點 (x, y) 在坐標平面上

③ 連起來

例 $f(x) = \frac{1}{x}$

$y = f(x) = \frac{1}{x}$ 雙曲線

y 的漸近線

定義域 $\{x | x \neq 0\}$

值域 $\{y | y \neq 0\}$

對應域: $\{y | y \neq 0\}$ or \mathbb{R}



x 的漸近線

x 的漸近線

y 的漸近線

x	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	-1	-2	-3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$y = f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	3	X or 0	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	-2	-3

① $\frac{1}{(\frac{1}{2})} = 2$

$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times 2 = 2$

②

$\frac{(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})} = \frac{1 \times 2}{1 \times 1} = 2$

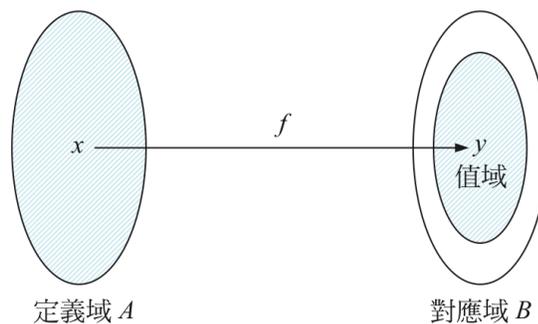
$$\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \textcircled{1} \quad \left(x(-2) = -2\right)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{1} = -2$$

➔ 定義 2-1 函數的定義

設 A 與 B 為兩集合，對於集合 A 中的任意一個元素 x ，就恰有集合 B 中的一個元素 y 與之對應，如此的對應為一個從定義域 A 到對應域 B 的函數，記作 $f: A \rightarrow B$ 或 $y = f(x)$ 。元素 y 稱為 x 的像，而所有的像所成的集合 $f(A)$ ，稱為函數的值域。

定義 2-1 有關於函數的說明如圖 2-2 所示：



■ 圖 2-2 函數自變量 x 與應變量 y 之關係圖



例 1