

1 基礎數學 I – 上課筆記

1.1 課程資訊

1.1.1 評分方式

- 出席 20%
- 期中考 20% 11/13(四)
- 期末考 20% 1/15(四)
- 作業 40%
 - 電影心得 8%
 - * 電影：《博士熱愛的算式》
 - * 12/4 停課，1/14 23:59 以前交電影心得（作業區）
 - 課後作業 4 次 (8% × 4)

重要：期中考與期末考會有一半的分數會從作業中出題

1.1.2 課程章節

- Ch2 函數
- Ch3 函數的極限與連續

1.2 Ch2 函數

1.2.1 2.1 函數的定義

函數: $f(x) = y$

重點：這裡的 = 是命名的意思，不是一般的等於！

- f of x (唸作“ f of x ”)：這是在命名這個函數叫做 f
- 意思：將 x 代入函數 f 之後對應到 y

1.2.2 2.2 函數代入的例子

例 1：基本代入 若 $f(x) = x^2$ ，則：

- $f(0) = 0^2 = 0$
- $f(1) = 1^2 = 1$
- $f(2) = 2^2 = 4$

例 2：多項式函數 函數式: $f() = ()^2 + () + 1$

- $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$
- $f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

或寫成： $f(x) = x^2 + x + 1$

- $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$
- $f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

例 3：分式函數 若 $f(x) = 1/x$ ，則：

- $f(1) = 1/1 = 1$
- $f(2) = 1/2$
- $f(0)$ 不行 (分母不能為 0)

1.2.3 2.3 函數可以有不同的命名方式

方法 1：用不同字母命名

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = 1/x$$

$$h(x) = \sqrt{x}$$

f, g, h 是不同的函數，用不同字母來區分。

方法 2：用下標編號命名 如果有多個函數想用同一個字母，可以用下標：

① $f(x) = x^2$ (第 1 個 f) ② $f(x) = 1/x$ (第 2 個 f) ③ $f(x) = \sqrt{x}$ (第 3 個 f)

說明： f_1, f_2, f_3 是三個不同的函數，只是都用 f 命名，用下標 1, 2, 3 來區分

1.3 函數如何代入??

若 $f(x) = x^2$ $f(2) = ?$

符號說明： \rightarrow = 波浪箭頭 (想知道)

1.3.1 步驟

Step 1: 先把未知數 (x) 寫成框框或括號

$$f(\quad) = (\quad)^2$$

Step 2: 用要代入的東西取代 \square

$$f(2) = (2)^2$$

Step 3: 計算

$$= 4$$

1.3.2 練習題

例 1) 若 $f(x) = x^2$ ，則 $f(y) = ?$ 解:

$$f(y) = (y)^2 = y^2$$

注意：不是 x^2

例 2) 若 $f(x) = x^2$ ，則 $f(x^2) = ?$ 解:

$$f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$$

注意： $(x^2)^2 \rightarrow x^4$

1.4 2.4 指數律 (指數的規則)

1.4.1 定義

n 次方: 乘自己 n 次

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n \quad (\text{n次方: 底數乘 n次})$$

1.4.2 例子

- $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ (4 個 x)
 - $x^3 = x \cdot x \cdot x$ (3 個 x)
 - $5^3 = 5 \times 5 \times 5$
-

1.4.3 指數律 (重要)

規則 1: 同底數相乘

$$x^3 \cdot x^2 = x^5$$

例:

$$x^3 \times x^2 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^5$$

規則 2: 指數的指數

$$(x^2)^3 = x^6$$

證明:

例 1:

$$(x^2)^2 = x^2 \cdot x^2 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^4$$

例 2:

$$(x^2 \cdot x)^3 = x^3 \cdot x^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^6$$

例 3:

$$(x^2 \cdot x)^2 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x$$

1.4.4 總結

框框 1: $(x) = x \cdot$

框框 2: $x \cdot x = x$

1.4.5 進階練習

計算 ① $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9 = 512$

或 $2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$

② $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

③ 進階:

$$\begin{aligned} ((2^3)^2)^2 &= (4^2)^2 = (16)^2 = 256 \\ &= 2^{(3 \times 2 \times 2)} = 2^9 = 256 \quad \checkmark \end{aligned}$$

1.4.6 函數代入的進階題

題目 若 $f(x) = x^3$ ，則 $f(x^2) = ?$

解:

$$f(x^2) = (x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$$

1.4.7 P.19 例 4

注意： $3 \times x = 3 \cdot x$

題目：若 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，則：

(1) $f(4) = ?$

解：

$$\begin{aligned} f(4) &= (4)^2 - 3(4) + 1 \\ &= 16 - 12 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

(2) $f(3) = ?$

解：

$$\begin{aligned} f(3) &= (3)^2 - 3(3) + 1 \\ &= 9 - 9 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

幹： $f(4) - f(3) = 5 - 1 = 4$ ✓ 答案

1.5 2. 看到不懂的東西就當作一個東西

1.5.1 例題

若 $f(x) = x^2 - 3x + 1$

求： $f(x+\Delta x) - f(x) = ?$

Δ : Delta (唸作“delta”，表示變化量) 解:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1$$

展開:

$$= (x+\Delta x)^2 - (3x+3\Delta x) + 1$$

$$= (x+\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1$$

1.5.2 負號規則 (重要)

減法 vs 負數 減 (v.): $0-2$ (複式 2) \rightarrow 0 和 2 相減，非遞，是算式 **負 (adj):** 負 2 $\rightarrow -2$ 是一個數

規則

$$\text{減 } -(a+b) = -a - b$$

唸：減括號 a 加 b 等於 負 a 減 b

$$\text{負 } (-1) \times (a+b) = (-1) \cdot a + (-1) \cdot b = -a - b$$

唸：負一 乘 括號 a 加 b 等於 負一 乘 a 加 負一 乘 b 等於 負 a 減 b

例:

$-(-2) - (-2)$ 是多少？

$$= +2 + 2 = 4$$

正 加

1.6 2.5 乘法公式 (括號上)

1.6.1 Q: $(2+3)^2 = 2^2 + 3^2 + ?$

1.6.2 錯誤想法

「先加再平方 = 先平方再加」

1.6.3 ✓ 正確答案

$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$ $\checkmark\checkmark\checkmark$ (這個對了)

但 $(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2$

1.6.4 幾何圖解 (搭配優先)

2	3	
2^2	2×3	2
2×3	3^2	3

面積計算:

$$\begin{aligned} (2+3)^2 &= 2^2 + 3^2 + 2 \times (2 \times 3) \\ &= 4 + 9 + 12 \\ &= 25 \end{aligned}$$

1.6.5 完全平方公式

a b

a a² ab

b ab b²

公式:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

短邊 長邊 兩相乘
A平方 B平方 取相乘

1.7 完整計算：f(x+Δx) – f(x)

1.7.1 完整展開

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1$$

使用乘法公式:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

所以：

$$(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

代入:

$$\begin{aligned}
 f(x+\Delta x) &= (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1 \\
 &= [x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] - 3(x+\Delta x) + 1 \\
 &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 \\
 &\quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 &\quad x^2 \quad (\Delta x)^2 \quad x \cdot \Delta x \quad x \quad \Delta x \quad \text{常數}
 \end{aligned}$$

1.7.2 計算 $f(x+\Delta x) - f(x)$

$$\begin{aligned}
 f(x+\Delta x) - f(x) &= [x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1] \\
 &\quad - [x^2 - 3x + 1]
 \end{aligned}$$

展開負號：

$$\begin{aligned}
 &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 \\
 &\quad - x^2 + 3x - 1
 \end{aligned}$$

合併同類項（相同項消去）：

$$= (\Delta x)^2 + 2x \cdot \Delta x - 3\Delta x$$

因此

$$f(x+\Delta x) - f(x) = (\Delta x)^2 + 2x(\Delta x) - 3(\Delta x)$$

1.8 總結筆記

1.8.1 本節重點

1. 函數代入: 框框法 $f(\) \rightarrow$ 代入 \rightarrow 計算

2. 指數規則:

- $x \cdot x = x^2$

- $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

3. 負號規則: $-(a+b) = -a - b$

4. 乘法公式: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

5. 看不懂的當一個東西: 把複雜表達式當成單一變數

整理日期：2025-10-10 課程：基礎數學 I