

# 1 基礎數學課程筆記

---

日期：2025-10-23 主題：函數的圖形

---

## 1.1 情況 2：兩個以上變數 $(x, y)$

變數	次方組合
1	$x, x^2, x^3, x^4, \dots$
$y$	$xy, yx^2, yx^3, yx^4, \dots$
$y^2$	$xy^2, x^2y^2, x^3y^2, y^2x^4, \dots$
$y^3$	$xy^3, y^3x^2$
$y^4$	$y^4x$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$


---

### 1.1.1 例 ①

$$(x + y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = ?$$

$$= (x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + 1 + 2x) + (y^2 + 1 + 2y)$$

$$(x^2, y^2, xy, x, y, 1)$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + 2$$

---

### 1.1.2 例 ②

$$(x + y)^2 + (x - y)^2$$

$$= (x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + (2 - 2)xy$$

$$= 2x^2 + 2y^2$$

---

## 1.2 例題 4 (複習)

若函數  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，求：

(1)  $f(4) - f(3) = ?$

(2)  $f(x + \Delta x) - f(x) = ?$

(3)  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = ?$

---

### 1.2.1 解答

(1)

$$f(\square) = \square^2 - 3\square + 1$$

$$f(4) = 4^2 - 3 \times 4 + 1 = 16 - 12 + 1 = 5$$

$$f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 9 - 9 + 1 = 1$$

$$f(4) - f(3) = 5 - 1 = 4$$

---

(2)

$$f(\square) = \square^2 - 3\square + 1$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1$$

展開：

$$= (x^2 + (\Delta x)^2 + 2x \cdot \Delta x) - 3(x + \Delta x) + 1$$

$$= x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - 3x - 3\Delta x + 1$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x^2 + (\Delta x)^2 + 2x\Delta x - 3x - 3\Delta x + 1) - (x^2 - 3x + 1)$$

$$= x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1$$

$$= \Delta x^2 + 2x\Delta x - 3\Delta x$$

展開： $\Delta x(\Delta x + 2x - 3)$

提公因式： $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x(\Delta x + 2x - 3)$

---

(3)

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(\Delta x + 2x - 3)}{\Delta x} = \Delta x + 2x - 3$$

---

## 1.3 函數的圖形

### 1.3.1 直角坐標平面

座標： $(x, y)$

- $x$  軸 (橫軸)
- $y$  軸 (縱軸)
- 座標 (先  $x$  , 再  $y$ )

四個象限：

- 第一象限： $x > 0, y > 0$ 
  - 例： $(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 1)$
- 第二象限： $x < 0, y > 0$

— 例： $(-4, 3), (-4, 2), (-4, 1)$

• 第三象限： $x < 0, y < 0$

— 例： $(-4, -3)$

• 第四象限： $x > 0, y < 0$

— 例： $(1, -3), (2, -3), (3, -3)$

**軸上的點：**

•  $x$  軸： $(x, 0)$

— 例： $(-1, 0), (-2, 0), (-3, 0), (-4, 0)$

— 例： $(1, 0), (2, 0), (3, 0)$

•  $y$  軸： $(0, y)$

— 例： $(0, 3), (0, 2), (0, 1)$

— 例： $(0, -1), (0, -2), (0, -3)$

• 原點： $(0, 0)$

**標記  $x$  軸、 $y$  軸** ( $x$  軸橫， $y$  軸縱)

---

### 1.3.2 函數圖形的繪製

**步驟：**

① 代入不同的  $x$  ② 描點  $(x, y)$  在坐標平面上 ③ 連起來

---

### 1.3.3 例題： $y = f(x) = x + 1$

把  $f(x)$  畫在  $y$  軸上， $y = x + 1$  是一條直線。

$$f(x) = ax + b \text{ (直線)}$$

列表：

$x$	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$y = f(x)$	1	2	3	4	5	0	-1	-2	-3

說明：

- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1, (x, y) = (0, 1)$
- $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0, (x, y) = (-1, 0)$

① 代入不同的  $x$  ② 描點  $(x, y)$  在坐標平面上 ③ 連起來

### 1.3.4 例題： $f(x) = \frac{1}{x}$

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \text{ (雙曲線)}$$

定義域： $\{x \mid x \neq 0\}$  或  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  或  $\mathbb{R}$

值域： $\{y \mid y \neq 0\}$  或  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  或  $\mathbb{R}$

列表：

$x$	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	-1	-2	-3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$y = f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	3	$\times$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	-2	-3

說明：

- ①  $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$  (說明表格中  $x = \frac{1}{2}$  時,  $y = 2$ )
- ②  $\frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$  (說明表格中  $x = -\frac{1}{3}$  時,  $y = -3$ )

**圖形特徵：**

- $x$  軸是漸近線
  - $y$  軸是漸近線
  - $y$  的漸近線
- 

## 1.4 定義 2-1：函數的定義

設  $A$  與  $B$  為兩集合，對於集合  $A$  中的任意一個元素  $x$ ，就恰有集合  $B$  中的一個元素  $y$  與之對應，如此的對應為一個從定義域  $A$  到對應域  $B$  的函數。

記作： $A \rightarrow B$  或  $y = f(x)$

元素  $y$  稱為  $x$  的像，而所有的像所成的集合  $f(A)$ ，稱為函數的值域。

### 圖 2-2：函數自變量、與應變量之關係圖

(定義域  $A \rightarrow$  對應域  $B$ )