

1 基礎數學課程筆記

日期：2025-11-27 主題：Ch3 函數的極限 (1)

1.1 本週主題

1. 直線與曲線的斜率差異
 2. 割線斜率 vs 切線斜率
 3. 極限的概念與表示法
 4. 極限的計算
-

1.2 詳細內容

1.2.1 1. 直線的斜率

對於直線 $y = f(x) = x$:

x	0	1	2
y	0	1	2

斜率公式：

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

直線的特性：任選兩個點算出來的斜率都一樣（上面例子都是 1）

1.2.2 2. 曲線的斜率問題

對於曲線 $y = x^2$:

問題：斜率是多少？怎麼算曲線的斜率？

點	A	B	C
x	0	1	2
y	0	1	4

重要發現：不同點的斜率不一樣！

- 用 AB 來算斜率 = 1 (AB 割線斜率)
- 用 BC 來算斜率 = $\frac{1-4}{1-2} = 3$ (BC 割線斜率)

但是我們想要知道的是**瞬間 (切線) 的斜率**，而不是割線斜率。

1.2.3 3. 瞬間的概念

瞬間 \approx 無限小的時間

符號說明：

- Δ ：差異
 - $\Delta t = t_2 - t_1$ (時間差)
- d ：無限小的差異
 - dt (無限小的時間差)

生活例子：– 一張照片不可能知道速度有多快 – 需要在極短的時間內拍兩張照片，才可以知道有沒有超速 – 只要考量 (接近) 無限小的時間差，就可以計算出**瞬間速度** (切線斜率)

1.2.4 4. 用割線逼近切線

對於 $y = x^2$ ，想要知道 $x = 2$ 時的切線斜率：

點	B	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C
x	1	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999	2
y	1	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.9999600001	3.999996000001	4

各割線斜率計算：

- BC 割線斜率 = $\frac{1-4}{1-2} = 3$
- B1C 割線斜率 = $\frac{3.61-4}{1.9-2} = 3.9$
- B2C 割線斜率 = $\frac{3.9601-4}{1.99-2} = 3.99$
- B3C 割線斜率 = $\frac{3.996001-4}{1.999-2} = 3.999$
- B4C 割線斜率 = 3.9999
- B5C 割線斜率 = 3.99999
- B6C 割線斜率 = 3.999999

關鍵觀察： x 很靠近 2，但 x 不是 2

結論：C 點的切線斜率 = 4

1.2.5 5. 極限的定義

當 x 越來越接近 2 的時候，割線斜率 $\frac{y-4}{x-2}$ 就會越來越接近 4

數學表示法：

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{y-4}{x-2} = 4$$

讀作：「在 x 趨近於 2 的時候， $\frac{y-4}{x-2}$ 的極限是 4」

1.2.6 6. 極限的計算

例題 1：

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

例題 2：

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x} = \frac{4 - 4}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

重要觀念：把 $x = 2$ 代進去就是答案嗎？**不一定！**

因為 \lim 代表： x **很靠近 2**，但 x **不是 2**

1.2.7 7. 不能直接代入的情況

反例：

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \neq \frac{0}{0}$$

如果直接代入 $x = 2$ ，會得到 $\frac{0}{0}$ ，這是**不確定型！**

正確做法：應該代入 1.9999999...，得到極限值會接近 4

因式分解法：

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

1.2.8 8. 極限與微分的關係

重要連結：

$y = x^2$ 在 $x = 2$ 時候的**切線斜率**是 4 \Leftrightarrow $y = x^2$ 在 $x = 2$ 時候的**微分**是 4

1.3 練習題

練習 1：

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = ?$$

提示：- $y = x$ 在 $x = 2$ 時候的切線斜率 - $\frac{x-2}{x-2}$ ， x 不能代入 2， x 很靠近 2 但 x 不是 2

練習 2：

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = ?$$

提示：- $y = x^2$ 在 $x = 3$ 時候的切線斜率 - $\frac{x^2-9}{x-3}$ ， x 不能代入 3， x 很靠近 3 但 x 不是 3

1.4 下週預告

- 說明 $f(2)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 的差異
 - 討論 $\frac{1}{0}$ 、 $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{0}{1}$ 的情況
-

1.5 重點整理

1. 直線：任兩點算出的斜率都一樣
2. 曲線：不同點的斜率不一樣，需要用「極限」的概念
3. 割線 → 切線：讓兩點越來越接近，割線斜率就會趨近切線斜率
4. 極限符號： $\lim_{x \rightarrow a}$ 表示「 x 趨近於 a ，但 $x \neq a$ 」
5. 不確定型：遇到 $\frac{0}{0}$ 時，要先化簡再求極限
6. 極限 = 微分：切線斜率就是微分的概念