

# 1 基礎數學課程筆記

---

日期：2025-12-11 主題：Ch3 函數的極限 (2)

---

## 1.1 極限 (limit)

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

(當  $x$  趨近 2 時， $x$  會趨近多少?)

$x \rightarrow 2$  表示  $x \neq 2$

---

## 1.2 例題

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 2 - 2 = 0$
  2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2) = 0 - 2 = -2$  (會被數字代換)
  3.  $\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 2 \times 2 = 4$
  4.  $\lim_{x \rightarrow 2} xy = 2y$
  5.  $\left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right) + \left(\lim_{x \rightarrow 3} x\right) = 2 + 3 = 5$   
(A) 4 (B) 5 (C) 6 答案：(B)
-

### 1.3 看 $x$ 趨近 2 時的極限

$x \rightarrow 2$  表示  $x \neq 2$

例：

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2$$

(因為  $x \neq 2$ ,  $x-2 \neq 0$ , 可約分)

想： $x$  用 2 代入？

$$\frac{2 \times 0}{0} = \frac{0}{0}$$

$x$  不能用 2 代入 !!

c.f.  $\frac{2(2-2)}{2-2}$  不能算

### 1.4 練習

公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

練習 1：

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

練習 2：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10000}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{9999} = 0$$

練習 3：

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x^2+x+1)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x^2+x+1) = 5^2 + 5 + 1 = 31$$

## 1.5 左極限 & 右極限

- $x \rightarrow 2^-$  (左極限) :  $x$  從左邊趨近 2
- $x \rightarrow 2^+$  (右極限) :  $x$  從右邊趨近 2

例 :  $\lim_{x \rightarrow 2} x$

- 左極限 :  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2$
  - 右極限 :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$
- 

## 1.6 階梯函數 (step function)

例 :

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 0$
- $f(2) = 0$
- $f(2.00000001) = 1$
- $f(3) = 1$

極限不存在 :

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$  (因為  $f(1.9999999) = 0$ )
  - $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$  (因為  $f(2.0000001) = 1$ )
- 

## 1.7 判定法則

法則 1 : 若  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  , 則  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

法則 2：若  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ，則  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  不存在

---

## 1.8 綜合例題

根據圖形（圖中有點  $(3, 3)$  實心點， $(5, 2)$  空心點）：

- $f(3) = ?$        $f(5) = ?$
  - $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = ?$        $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = ?$   
 $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = ?$        $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = ?$
  - $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  存在嗎？       $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$  存在嗎？
  - $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) ?$        $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) ?$
- 

詳解：

### 1. 函數值：

- $f(3) = 3$ （實心點在  $(3, 3)$ ）
- $f(5) = 2$ （空心點表示該點不含，但函數值定義在  $y = 2$ ）

### 2. 左右極限：

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ （從左邊趨近，沿著下方曲線）
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$ （從右邊趨近，沿著曲線）
- $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 2$ （從左邊趨近）
- $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 2$ （從右邊趨近）

### 3. 極限是否存在：

- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ （存在，因為左極限 = 右極限 = 2）
- $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$ （存在，因為左極限 = 右極限 = 2）

### 4. 極限值 vs 函數值：

- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \neq f(3) = 3$  (不相等)
- $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2 = f(5) = 2$  (相等)