

1 基礎數學課程筆記

日期：2025-12-18 主題：Ch3 函數的極限與連續 – 連續性

1.1 複習

根據圖形（圖中有點 $(3, 3)$ 實心點， $(5, 2)$ 空心點）：

1. $f(3) = 3, f(5) = 2$

2. 極限值：

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 2$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 存在嗎？

是， $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ （因為左極限 = 右極限 = 2）

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ 存在嗎？

是， $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ ？

$2 \neq 3$ （不相等）

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$ ？

$2 = 2$ （相等）

1.2 結論

- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$ ： $f(x)$ 在 $x = 3$ 不連續（有斷掉）

- $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$: $f(x)$ 在 $x = 5$ 連續 (沒有斷掉)
-

1.3 連續的定義

$f(x)$ 在 $x = a$ 連續 :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

否則不連續。

1.4 例子：階梯函數（薪水）

$f(x)$: 薪水 (縱軸為 \$, 橫軸為年資)

- $f(x) = 30000$, 當 $0 \leq x < 1$
- $f(x) = 32000$, 當 $1 \leq x < 2$
- $f(x) = 34000$, 當 $x \geq 2$

Q : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$??

1. $f(x)$ 在 $x = 0.5$ 是連續的嗎？

Yes

$$\lim_{x \rightarrow 0.5} f(x) = 30000, f(0.5) = 30000$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0.5} f(x) = f(0.5)$, 故連續

2. $x = 1$?

No

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 30000, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 32000$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在 \Rightarrow 不連續 !!

3. $x = 2$?

No

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 32000, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 34000$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 不存在 \Rightarrow 不連續 !!

1.5 連續函數

1. $y = mx + b$ (線性函數)
2. $y = ax^2 + bx + c$ (二次函數)

多項式函數都是連續函數

3. 階梯函數非連續函數 (在 $x = 0$ 不連續點)

4. $y = f(x) = \frac{1}{x}$

1.6 $y = \frac{1}{x}$ 的分析

Q1 : $f(x)$ 在 $x = 2$ 連續?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2} = f(2)$$

故連續。

(把連續點上綠色)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

x 往 ∞ , y 趨近 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

故整數 $y = 0$ 是漸近線

Q2 : $f(x)$ 在 $x = 0$ 連續?

No !!

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad (\text{漸近線 : } x = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (\text{漸近線 : } x = 0)$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow f(x)$ 在 $x = 0$ 極限不存在 \Rightarrow 不連續

P.S. $f(0)$ 無意義